ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HIỂN

PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP TÌM NGHIỆM CHUNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG, BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------✍📖✍--------------

NGUYỄN THỊ HIỀN

PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP TÌM NGHIỆM CHUNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG, BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu và các chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	Không gian vec tơ thực Euclide n chiều
$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên khác không
H	Không gian Hilbert thực
$\emptyset$	Tập rỗng
$\mathcal{D}(A)$	Miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	Miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	Toán tử ngược của toán tử A
I	Toán tử đồng nhất
$C[a,b]$	Không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	Giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	Giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x_0
$\arg\min\{f(x) : x \in C\}$	Phần tử cực tiểu hàm f trên C
$\mathrm{Fix}(T)$	Tập điểm bất động của ánh xạ T
EP	Bài toán cân bằng (Equilibrium Problem)
VI	Bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational Inequality Problem)
FP	Bài toán điểm bất động (Fixed Point Problem)

Mở đầu

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H, $G : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn tính chất cân bằng $G(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Xét bài toán

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho} \quad G(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

ký hiệu là $\mathrm{EP}(G, C)$. Bài toán (1) được Nikaido và Isoda đề xuất lần đầu tiên vào năm 1955 nhằm tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash (xem [14]). Năm 1972 nó được Ky Fan nghiên cứu dưới dạng bất đẳng thức minimax (xem [8]). Tên gọi bài toán cân bằng được các tác giả Muu và Oettli đưa ra vào năm 1992 (xem [13]). Điểm lý thú của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(G, C)$ là nó bao hàm nhiều bài toán riêng lẻ khác nhau, chẳng hạn bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động v.v... Chẳng hạn, nếu ta chọn

$$G(x, y) := \langle A(x), y - x\rangle, \quad A : C \to C \text{ là một ánh xạ} \tag{2}$$

thì bài toán cân bằng (1) sẽ trở thành bài toán

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho} \quad \langle A(x^*), y - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{3}$$

Đây là bài toán bất đẳng thức biến phân, với ánh xạ giá A và tập ràng buộc C, ký hiệu là $\mathrm{VI}(A, C)$. Nếu ánh xạ $A : C \to C$ được xác định bởi

$$A(x) := x - T(x), \tag{4}$$

ở đây $T : C \to C$ là một ánh xạ thì bài toán bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}(A, C)$ được đưa về bài toán điểm bất động $\mathrm{FP}(T, C)$:

$$\text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho} \quad x^* = T(x^*). \tag{5}$$

Các phương pháp giải và các kết quả nghiên cứu của bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân v.v... có thể được mở rộng và tổng quát hóa để áp dụng trở lại giải bài toán cân bằng.

Các nghiên cứu chính về bài toán cân bằng EP(G, C) được chia làm hai hướng

(a) Các nghiên cứu định tính: nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, sự ổn định nghiệm;

(b) Các nghiên cứu định lượng: các phương pháp, thuật toán giải, tốc độ hội tụ, áp dụng vào thực tế.

Ngoài ra, việc kết hợp bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động luôn là một đề tài lý thú. Bằng việc kết hợp các bài toán này, ta tận dụng được các kỹ thuật đã có trong lý thuyết điểm bất động để đề xuất và chứng minh sự hội tụ của các thuật toán mới cho bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân. Một trong những chủ đề nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học là bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động.

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày một số phương pháp lai ghép tìm nghiệm (nghiệm chung) của bài toán cân bằng (EP - Equilibrium Problem), bài toán bất đẳng thức biến phân (VI - Variational Inequality Problem) và bài toán điểm bất động (FP - Fixed Point Problem) trong không gian Hilbert thực H trong bài báo [17] công bố năm 2015.

Nội dung của đề tài được trình bày trong hai chương.

Chương 1 với tiêu đề "Bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng", giới thiệu về bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng cùng mối liên hệ giữa các bài toán này.

Chương 2 "Phương pháp lai ghép tìm nghiệm chung của các bài toán EP, VI, FP" trình bày một số phương pháp kết hợp tìm nghiệm chung của các bài toán EP, VI, FP. Nội dung của chương này được viết trên cơ sở bài báo

[17] công bố năm 2015.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu và làm luận văn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán – Tin, trong Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Phó Giáo sư, Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy đã giúp đỡ và chỉ bảo em tận tình. Cô không chỉ truyền đạt tri thức, kĩ năng cần thiết mà còn dạy em phương pháp làm việc khoa học đồng thời cô cũng là người truyền lửa đam mê, nhiệt huyết và sự tận tụy trong công việc.

Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu trường Trung Học Phổ Thông Gia Bình số 1 - Bắc Ninh đã động viên, khích lệ và tạo mọi điều kiện để em hoàn thành việc học chương trình thạc sĩ.

Mặc dù đã rất cố gắng xong bản luận văn này không thể tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn học viên.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Hiển

Chương 1

Bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng

Chương này giới thiệu về bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng trong không gian Hilbert thực H và trình bày mối liên hệ giữa chúng. Nội dung của chương gồm ba phần. Phần đầu tiên trình bày về khái niệm ánh xạ không giãn, toán tử chiếu trong không gian Hilbert và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn. Phần thứ hai giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert. Phần cuối của chương giới thiệu về bài toán cân bằng với song hàm đơn điệu và trình bày mối liên hệ giữa bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp kiến thức từ các tài liệu [2], [3], [10] và [12].

1.1 Bài toán điểm bất động

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$, tương ứng. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian H. Ta ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x và $x_n \to x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.

1.1.1 Ánh xạ không giãn

Định nghĩa 1.1.1 (xem [3]) Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực H.

(i) Ánh xạ $T : C \to H$ được gọi là ánh xạ L-liên tục Lipschitz trên C nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C. \tag{1.1}$$

(ii) Trong (1.1), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

(iii) Ánh xạ T được gọi là không giãn vững trên C nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \langle T(x) - T(y), x - y\rangle.$$

Ta thấy nếu T là ánh xạ không giãn vững trên C thì T là ánh xạ không giãn trên C.

1.1.2 Toán tử chiếu trong không gian Hilbert

Ta xét hình chiếu của một phần tử $x \in H$ lên C.

Định lý 1.1.2 (xem [2]) *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Khi đó với mọi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $y \in C$ sao cho*

$$\|x - y\| = \min_{z \in C} \|x - z\|. \tag{1.2}$$

Điểm $y \in C$ thỏa mãn (1.2) được gọi là hình chiếu của x trên C, ký hiệu là $P_C(x)$.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [2]) Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Ánh xạ $P_C : H \to C$ xác định bởi

$$\|x - P_C(x)\| = \min_{z \in C} \|x - z\|$$

được gọi là toán tử chiếu (phép chiếu mêtric) lên C.